ТЕМА 2 УПРАВЛЯЕМОСТЬ, НАБЛЮДАЕМОСТЬ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНОЙ И ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

2.1. Постановка и исследования задач управляемости линейных систем

Рассмотрим систему управления, которая описывается линейными дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t)\,, \qquad (2.1)$$

где $x(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t))^T$, n-мерний вектор-столбец, $u(t) = (u_1(t),\ldots,u_m(t))^T$ – m-мерний вектор-столбец, $A(t)$ – матрица размерности $n \times n$, $B(t)$ – матрица размерности $n \times m$.

Отметим, что $A(t)$ и $B(t)$ считаются известными матрицами, элементы которых зависят от времени t.

Системы вида (2.1) называются нестационарными системами управления.

Определение 2.1. Система (2.1) называется вполне управляемой (completely controllable), если для двух произвольных точек x^0, x^1 из фазового пространства X и двух произвольных значений t_0, t_1 аргумента t существует такая функция управления $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, при которой решение системы уравнений (2.1) удовлетворяет условиям: $x(t_0) = x^0$, $x(t_1) = x^1$.

Обозначим через $X(t,\xi)$ – фундаментальную матрицу для однородных уравнений $\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t)$, соответствующих уравнениям (2.1), которая нормированная в точке $\xi \in [t_0, t_1]$. Введем матрицу $W(t,\xi) = X(t,\xi)B(\xi)$, которую называют матрицей импульсных переходных функций.

Считаем $W(t,\xi)=\begin{pmatrix} w_1(t,\xi) \\ \vdots \\ w_n(t,\xi) \end{pmatrix}$, где $w_i(t,\xi)$ – вектор-строка:

$$w_i(t,\xi)=(w_{i1}(t,\xi),\ldots,w_{in}(t,\xi)),\ i=\overline{1,n}. \qquad (2.2)$$

Теорема 2.1.[4]. Для того, чтобы система (2.1) была вполне управляемой, необходимо и достаточно, чтобы вектор-функции $w_1(t,\xi),\cdots,w_n(t,\xi)$ были линейно-независимыми на любом интервале $[t_0,t_1]$.

Заметим, что условия, приведенные в теореме 2.1, практически трудно использовать, так как матрица $W(t,\xi)$ наперед не задается и ее нужно рассчитывать каждый раз при новых значениях t и ξ. Поэтому желательно найти условия вполне управляемости, выражающиеся через матрицы $A(t),\quad B(t)$.

Рассмотрим этот вопрос для систем управления, в которых A,B – матрицы с постоянными элементами. Такие системы называются линейными стационарными системами:

$$\frac{dx}{dt}=Ax(t)+Bu(t). \qquad (2.3)$$

Теорема 2.2. Для вполне управляемости стационарной системы (2.3) n-го порядка необходимо и достаточно, чтобы

$$rangS_n=rang(B,AB,\ldots,A^{n-1}B)=n. \qquad (2.4)$$

Следствие 2.1. Если в системе (2.3) вектор управления $u(t)$ одномерний, а $B=b$ – столбец, то необходимое и достаточное условие вполне управляемости имеет вид:

$$\det(b,Ab,\ldots,A^{n-1}b)\neq 0. \qquad (2.5)$$

Соотношения (2.4) и (2.5) называются критерием вполне управляемости Калмана для линейных стационарных систем.

Определение 2.2 *(Вполне управляемость на заданном интервале).* Нестационарная система (2.1) называется вполне управляемой на заданном интервале $[t_0, t_1]$, если для 2-х произвольных значений x^0, x^1 из фазового простанства X можно указать такую функцию управления $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, что решение этой системы удовлетворяет краевым условиям: $x(t_0) = x^0$, $x(t_1) = x^1$.

Теорема 2.3. Если для некоторого t из заданного промежутка $[t_0, t_1]$ выполняется условие

$$rang[z_1(t), z_2(t), \ldots, z_n(t)] = n, \tag{2.6}$$

где

$$z_1(t) = B(t), \quad z_k(t) = A(t) z_{k-1}(t) - \frac{dz_{k-1}}{dt}, \ k = \overline{2, n},$$

то система (2.1) – вполне управляемая на заданном интервале.

Отметитм, что если вектор-функции $w_i(t, \xi)$, $i = \overline{1, n}$ при $t = t_1$ линейно-зависимые на заданном интервале $[t_0, t_1]$, то

$$rang[z_1(t), z_2(t), \ldots, z_n(t)] < n. \tag{2.7}$$

2.2. Наблюдаемость в линейных системах управления

В теории управления рассматриваются задачи о наблюдаемости системы. Содержание этих задач: установить алгоритм определения части или всех фазовых координат системы при условии, что известна вторая часть фазовых координат или некоторые функции от этих координат, а также известная математическая модель системы управления в виде системы дифференциальных уравнений.

Рассмотрим задачу наблюдаемости для линейных систем вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t) x(t), \tag{2.8}$$

где $x(t)$ – n-мерний вектор состояния системы, $A(t)$ – матрица размерности $n \times n$ с известными елементами.

Определение 2.3. Задачу нахождения вектора $x(t)$ состояния системы (2.8) или отдельных его компонент по известной на некотором интервале $[t_0, t_1]$ функции

$$y(t) = q^T(t)x(t), \qquad (2.9)$$

где $q(t)$ – известная n -мерная вектор-функция, будем называть задачей наблюдаемости линейной системы (2.8). Функцию $y(t)$ называют функцией (сигналом) выхода системы (2.8).

Замечание 2.1. Обобщение определения 2.3: найти вектор $x(t)$ или отдельные его компоненты по известной вектор-функцией выхода

$$y(t) = G^T(t)x(t), \qquad (2.10)$$

где $G(t)$ – известная матрица $n \times m$.

Определение 2.4. Если задача наблюдаемости (2.8), (2.9) (или (2.8), (2.10)) имеет решение, то система называется вполне наблюдаемой или частично наблюдаемой зависимости от того, все или часть компонент вектора $x(t)$ удается установить.

Определение 2.5. Пара матриц $A(t), G(t)$ называется наблюдаемой, если можно решить задачу наблюдаемости для системы (2.8) по вектору выхода (2.10).

Рассмотрим наиболее простые решения задач наблюдаемости.

Теорема 2.4. Пусть для каждого $t \in [t_0, t_1]$ существуют и известны $n-1$ производные от вектора выхода (2.10) системы (2.8). Тогда для существования решения задачи наблюдаемости для системы (2.8) в фиксированной точке t в виде линейной комбинации значений $y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)$ достаточно, чтобы

$$rang\widetilde{S}_n = n, \qquad (2.11)$$

где $$\widetilde{S}_n(t) = (G_1(t), G_2(t), \ldots, G_n(t)), \qquad (2.12)$$

$$G_1^T(t) = G^T(t),\ G_{\nu+1}^T(t) = G_\nu^T(t)A(t) + \frac{dG_\nu^T(t)}{dt},\ \nu = \overline{1, n-1}. \qquad (2.13)$$

Доказательство. Продифференцируем $n-1$ раз вектор-функцию (2.10) и получим n равенств

$$y(t) = G_1^*(t)x(t),$$
$$y'(t) = \left[\frac{dG_1^*(t)}{dt} + G_1^*(t)A(t)\right]x(t) = G_2^*(t)x(t),$$
$$\vdots$$
$$y^{(n-1)}(t) = \left[\frac{dG_{n-1}^*(t)}{dt^{n-1}} + G_{n-1}^*(t)A(t)\right]x(t) = G_n^*(t)x(t).$$

Перепишем эти уравнения в матричном виде

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ \vdots \\ y^{n-1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1^*(t)) \\ \vdots \\ G_n^*(t) \end{pmatrix} x(t) = \tilde{S}_n(t)x(t)\,. \tag{2.14}$$

Рассмотрим (2.14) как систему линейных алгебраических уравнений относительно компонент вектора $x(t)$. Ее решение существует, если ранг матрицы системы равен n (достаточное условие). Поскольку ранг матрицы системы равен рангу $\tilde{S}_n(t)$, то теорема доказана.

Замечание 2.2. Когда $G_1(t) = q(t)$, то условие (2.11) имеет вид:

$$\det\ \tilde{S}_n(t) = \det(q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t)) \neq 0\,, \tag{2.15}$$

где

$$q_1^T(t) = q^T(t),\ q_\nu^T(t) = q_{\nu-1}^T(t)A(t) + \frac{dq_{\nu-1}^T(t)}{dt},\ \ \nu = 1,2,\ldots,n.$$

Тогда для фиксированного t имеем:

$$x(t) = (\tilde{S}_n^T(t))^{-1}\begin{pmatrix} y(t) \\ \vdots \\ y^{n-1}(t) \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

(это следует из системы (2.14)).

Замечание 2.3. Если система уравнений (2.8) стационарная, то есть $A(t) = A = const$ и $G_1(t) = const\,(або\, q(t) = const)$, то тогда матрица $\widetilde{S}_n$, условия (2.11), (2.15) и формула (2.16) приобретут соответственно вид:

$$\widetilde{S}_n(t) = (G, A^T G, \dots, A^{T\,n-1} G).$$

$$rang\widetilde{S}_n = rang(G, A^T G, \dots, A^{T\,n-1} G) = n. \qquad (2.17)$$

$$\det \widetilde{S}_n(t) = \det\,(q, A^T q, \dots, A^{T\,n-1} q) \neq 0. \qquad (2.18)$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} q^T \\ q^T A \\ \vdots \\ q^T A^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{n-1}(t) \end{pmatrix}. \qquad (2.19)$$

Отметим, что решение задачи наблюдаемости через вектор выхода и его производные сложно использовать в практических приложениях, что связано с необходимостью численно находить производные данной функции выхода $y(t)$.

2.3. Связь между наблюдаемостью и управляемостью в системах управления

Пусть имеем условие вполне управляемости:

$$rang(\,z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)) = n, \qquad (2.20)$$

где

$$z_1(t) = B(t), \quad z_k(t) = A(t) z_{k-1}(t) - \frac{dz_{k-1}(t)}{dt}, \; k = \overline{2,n}$$

для линейной нестационарной системы управления (2.1).

Запишем также условие вполне наблюдаемости для линейной системы $\dfrac{dx}{dt} = A(t)x(t)$ с выходом $y(t) = G^T(t)x(t)$:

$$rang(G_1(t), G_2(t), \dots, G_n(t)) = n, \qquad (2.21)$$

где

$$G_1^T(t) = G^T(t),\ G_{\nu+1}^T(t) = G_\nu^T(t)A(t) + \frac{dG_\nu^T(t)}{dt}, \quad \nu = \overline{1, n-1}.$$

Отметим, что условия (2.20), (2.21) сходны между собой по форме. Впрочем, существует связь между ними и по содержанию.

Теорема 2.5. Если выполняется условие вполне управляемости системы

$$\frac{dx}{dt} = -A^T(t)x(t) + G(t)u(t) \tag{2.22}$$

то выполняется условие (2.21) вполне наблюдаемости системы $\frac{dx}{dt} = A(t)x(t)$ с выходом $y(t) = G^T(t)x(t)$.

Систему (2.22) называют сопряженной к системе управления (2.1). Таким образом, данная теорема позволяет сводить исследование задач наблюдаемости линейных систем к исследованию задач управляемости сопряженных систем. Это дает возможность использовать результаты, касающиеся управляемости, при решении задач наблюдаемости.

Рассмотрим случай, когда элементы матриц A, G не зависят от t и перенесем результаты по теории управляемости на задачу наблюдаемости.

Теорема 2.6. Для того чтобы существовало решение задачи наблюдаемости системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{2.23}$$

с вектором выхода (измерений)

$$y = G^T x \tag{2.24}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$rang\tilde{S}_n = rang(G, A^T G, \ldots, A^{T^{n-1}} G) = n. \tag{2.25}$$

Замечание 2.4. Чаще всего задачи наблюдаемости возникают в системах управления, поэтому они решаются параллельно с задачей управления движением системы. В линейных системах, это означает, что задача наблюдаемости возникает не для системы $\frac{dx}{dt} = A(t)x(t)$ а для системы управления $\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$, где $u(t)$ – m-мерний вектор управления. При этом вектор выхода $y(t) = G^T(t)x(t)$ имеет размерность m.

2.4. Идентификации параметров математических моделей динамических систем

Во многих случаях исследователям неизвестны как сама структура математических моделей системы управления, так и параметры моделей. Это приводит к необходимости оценки или самой структуры и параметров математической модели, или значений отдельных параметров при заданной заранее структуре модели. Рассмотрим задачу нахождения неизвестных параметров математической модели, если ее структура определена в виде системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Задача нахождения (оценки) неизвестных параметров математической модели объекта исследования называется задачей идентификации.

Для иллюстрации подходов к решению проблем такого типа рассмотрим простейшую задачу идентификации.

Пусть состояние системы определяется вектором $x(t)$ из n-мерного евклидова пространства и для некоторого значения аргумента t в результате измерений получены векторы

$$x(t), \frac{dx(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^n x(t)}{dt^n}. \qquad (2.26)$$

В этом случае задача идентификации заключается в нахождении такой матрицы размерности n, для которой выполнялись условия:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = Ax, \\
&\frac{d^2x}{dt^2} = A\frac{dx}{dt}, \\
&\dots \\
&\frac{d^nx}{dt^n} = A\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}.
\end{aligned}
\qquad (2.27)
$$

Если для известных измерений (2.26) существует матрица A, которая удовлетворяет соотношению (2.27), то задача идентификации системы имеет решение.

Обозначив строки матрицы A через векторы $a_1^T, a_2^T, \dots, a_n^T$, уравнения (2.27) можно переписать в виде:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx_j}{dt} = a_j^T x, \\
&\dots \qquad\qquad , \qquad (j = 1, 2, \dots, n). \\
&\frac{d^nx_j}{dt^n} = a_j^T \frac{d^nx}{dt^n}
\end{aligned}
\qquad (2.28)
$$

Рассматривая соотношение (2.28) при каждом значении j как систему линейных алгебраических уравнений относительно элементов строки $a_j^T = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn})$, можно записать

$$
\begin{bmatrix} x^T \\ \dfrac{dx^T}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}x^T}{dt^{n-1}} \end{bmatrix} a_j = \begin{bmatrix} \dfrac{dx_j}{dt} \\ \dfrac{d^2x_j}{dt^2} \\ \vdots \\ \dfrac{d^nx_j}{dt^n} \end{bmatrix}. \quad (j = 1, 2, \dots, n). \qquad (2.29)
$$

Отсюда, условие существования решения системы (2.29) имеет вид:

$$\det\left(x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} \right) \neq 0\,. \qquad (2.30)$$

Если условие (2.30) выполняется, то это означает, что параметры a_j математической модели в этом случае определяются по формулам:

$$a_j = \begin{bmatrix} x^T \\ \dfrac{dx^T}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}x^T}{dt^{n-1}} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \dfrac{dx_j}{dt} \\ \dfrac{d^2x_j}{dt^2} \\ \vdots \\ \dfrac{d^nx_j}{dt^n} \end{bmatrix}, \quad (j = 1, 2, \ldots, n)\,. \qquad (2.31)$$

В результате подстановки соотношений (2.27) в условие (2.30) нетрудно получить

$$\det(x, Ax, \ldots A^{n-1}x) \neq 0\,. \qquad (2.32)$$

Сравнив (2.32) с условием (2.5) вполне управляемости системы (2.3), можно сформулировать связь между задачами идентификации и управляемости: для существования решения задачи идентификации в виде математической модели $\dfrac{dx}{dt} = Ax$ при условии наблюдения вектора состояния $x(t)$ достаточно, чтобы матрица A и вектор $x(t)$ удовлетворяли условие (2.5) вполне управляемости системы (2.3), где $b = x(t)$.

Подобную аналогию можно установить также между условиями идентификации и вполне наблюдаемости.

Поскольку матрица A заранее неизвестна, то на практике условие идентификации проверяют с помощью условия (2.30).

Заметим, что необходимое и достаточное условие поставленной задачи идентификации заключается в том, чтобы совпадали ранги основной и расширенной матриц в системе (2.29).

2.5. Управляемость, наблюдаемость и идентификация дискретных линейных систем управления

Важным разделом теории управления является исследование дискретных систем управления, то есть систем, которые меняют свое состояние в дискретные моменты времени. Заметим, что системы управления, в которых в управляющем устройстве используются процессоры, по своей природе являются дискретными системами, поскольку процессор меняет свое состояние (проводит вычисления) с определенной тактовой частотой.

Не вдаваясь в подробное описание процесса дискретизации непрерывных систем, будем считать, что уравнение движения дискретной линейной системы управления задаются в виде:

$$x(k) = A(k)x(k-1) + B(k)u(k-1), \qquad (2.33)$$

где $x(k) = x(t_k)$ – n-мерний вектор состояния системы в момент времени (в точке) t_k, $u(k-1) = u(t_{k-1})$ – m-мерний вектор управления в момент времени t_{k-1}, $A(k), B(k)$ – матрицы соответствующих размерностей, элементы которых зависят от момента времени t_k. Дискретный аргумент t_k принимает значения из заданной последовательности моментов времени

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k < t_{k+1} < \ldots < t_N < \ldots.$$

Рассмотрим движение системы (2.33) на некотором интервале времени $[t^{(0)}, t^{(1)}]$.

Определение 2.6. Линейную дискретную систему управления (2.33) будем называть вполне управляемой на заданном интервале от $t^{(0)} = t_k$ до $t^{(1)} = t_{k+N}$, если для двух произвольных состояний

$x^{(0)} \in X$, $x^{(1)} \in X$, где X – множество допустимых состояний системы (2.33), существует такая последовательность управлений $u(k), u(k+1), \ldots, u(k+N-1)$, с помощью которой система (2.33) переходит из состояния $x^{(0)} \in X$ в состояние $x^{(1)} \in X$, то есть $x(k) = x^{(0)}$, $x(k+N) = x^{(1)}$.

Теорема 2.8. Необходимым и достаточным условием вполне управляемости линейной дискретной системы (2.33) является условие:

$$\begin{aligned} &rang(A(k+N)A(k+N-1)\ldots A(k+2)B(k+1), \\ &A(k+N)A(k+N-1)\ldots A(k+3)B(k+2), \ldots, B(k+N)) = n. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Замечание 2.5. Постановка задачи об управляемости дискретных систем имеет смысл при условии $Nm \geq n$.

Следствие 2.2. Для линейной стационарной дискретной системы (элементы матриц $A(k) = A$, $B(k) = B$ не зависят от дискретного аргумента t_k, то есть постоянными) условие вполне управляемости (2.34) принимает вид

$$rang(B, AB, A^{n-1}B) = n, \tag{2.35}$$

а в случае, когда матрица B является столбцом b, условие вполне управляемости приобретает вид

$$\det(b, Ab, A^{n-1}b) \neq 0.$$

Рассмотрим задачу наблюдаемости для линейных дискретных систем.

Пусть задана дискретная система

$$x(k+1) = A(k+1)x(k) \tag{2.36}$$

и известный m-мерный вектор выхода (измерений) системы

$$y(k) = G^T(k)x(k) \tag{2.37}$$

в дискретные моменты времени t_k, t_{k+1}, t_{k+N-1}.

Определение 2.7. Если по известной дискретной системой (2.36) и известным m-мерным вектором выхода (2.37) в дискретные моменты времени t_k, t_{k+1}, t_{k+N-1} можно восстановить состояние системы, то такая система называется наблюдаемой дискретной системой.

Теорема 2.9. Для наблюдаемости системы (2.36) по известному выходу (2.37) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\begin{aligned} &rang(G(k), A^T(k)G(k+1), \ldots \\ &\ldots, A^T(k)A^T(k+1)\ldots A^T(k+n-2)G^T(k+n-1)) = n. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Следствие 2.3. Если для матриц выполняется условие $A(k) = A, \quad G(k) = G$, где матрицы A и G не зависящие от дискретного аргумента t_k, то условие наблюдаемости (2.38) приобретает вид

$$rang(G, A^T G, A^{T^{n-1}} G) = n.$$

Следствие 2.4. Если выполняются условия следствия 2.3 и матрица G является столбцом g, то условие наблюдаемости записывается так:

$$\det(g, A^T g, A^{T^{n-1}} g) \neq 0.$$

Тогда восстановленный вектор состояния дискретной системы $x(k)$ будет определяться по формуле:

$$x(k) = \begin{pmatrix} g^T \\ g^T A \\ \vdots \\ g^T A^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ \vdots \\ y(k+n-1) \end{pmatrix}. \tag{2.39}$$

Рассмотрим задачу идентификации для линейных дискретных систем. Пусть задана линейная стационарная дискретная система

$$x(k+1) = Ax(k), \tag{2.40}$$

где A – неизвестна матрица размерности $n \times n$ с постоянными параметрами.

Определение 2.8. Если по известным значениям векторов $x(k), x(k+1), \ldots, x(k+n)$ состояния линейной стационарной системы (2.40) можно восстановить (найти) матрицу A, то система называется такой, которая может быть идентифицированной, а процесс нахождения матрицы A называется идентификацией системы.

Теорема 2.10. Если выполняется условие

$$\det(x(k), x(k+1), \ldots, x(k+n-1)) \neq 0, \tag{2.41}$$

то задача идентификации для линейной дискретной системы (2.40) по известным значениям векторов выхода имеет решение.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М., 1983.

2. Беллман Р. Динамическое программирование. – М., 1960.

3. Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. Оптимизация, оценка и управление. – М., 1972.

4. Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф. Основы теории управления. – К., 1975.

5. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М., 1980.

6. Зубов В.И. Лекции по теории управления. – М., 1975.

7. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. – М., 1975.

8. Острем К. Введение в стохастическую теорию оптимального управления. – М., 1973.

9. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. – М., 1968.

10. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. – М., 1978.

Дополнительная

11. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М., 1979.

12. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными обьектами. – М., 1976.

13. Аоки М. Оптимизация стохастических систем. – М., 1971.

14. Балакришнан А.В. Теория фильтрации Калмана. – М., 1984.

15. Бейко И.В., Бублик Б.Н., Зинько П.Н. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. – К., 1983.

16. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. – М., 1969.

17. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – К., 1985.

18. Бублик Б.Н., Данилов В.Я., Наконечный А.Г. Некоторые задачи наблюдения и управления в линейных системах / Учеб. пособие. – К., 1988.

19. Габасов Р., Кириллова Ф. Качественная теория оптимальных процессов. – М., 1971.

20. Гноенский Л.С., Каменский Г.А., Эльсгольц Л.Э. Математические основы теории управляемых систем. – М., 1969.

21. Зайцев Г.Ф., Костюк В.И., Чинаев П.И. Основы автоматического управления и регулирования. – К., 1977.

22. Иванов В.А., Фалдин Н.В. Теория оптимальных систем автома тического регулирования. – М., 1981.

23. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. – М., 1971.

24. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. – М., 1973.

25. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. – М., 1972.

26. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Минск, 1974.

27. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. – М., 1981.

28. Пропой А.И. Элементы теории дискретных оптимальных процессов. – М., 1973.

29. Растригин Л.А. Современные принципы управления сложными сис темами. – М., 1980.

30. Сейдж Э.П., Уайт Ч.С. III. Оптимальное управление системами. – М., 1982.

31. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управ ления. – М., 1978.

32. Цыпкин Я.З. Основы теории автоматических систем. – М., 1977.

33. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М., 1969.